**Содержание**

Введение………………………………………………………………………..3

1. Арифметическая производная степенного выражения ……….….4
2. НОД (D(m),m)……………………………………………… ……….4
3. Свойства арифметической производной ……………………….....5
4. Составная арифметическая производная………………………….7
5. Дополнительные исследования. Близнецы………………………..7

Заключение……………………………………………………………………14

Литература…………………………………………………………………….14

**Введение**

Введём определение арифметической производной. Пусть D(m) – арифметическая производная от числа m, обладающая следующими свойствами:

1. D(0) = D(1) = 0
2. D(p) = 1, где p является простым числом, т.е. D(3)=1, D(2)=1, D(5)=1 и тому подобное
3. D(m )= +

Например, D(10) = = + = + =7

Или, D(18) = = + = + = ) + = + +6 = + 6 = 15+6=21

1. D(–) = – D(n), т.е. D(–6)= – D(6)
2. D =

Например, D = = = = = = =

1. **Арифметическая производная степенного выражения**

Посмотрим, как выполняется арифметическая производная степенного выражения:

D(16) = = + = = ) = +6 =32

Попробуем по классической формуле

D(24) = 4∙23 = 32,

D(mn) = n∙mn–1.

Докажем эту формулу с помощью математической индукции.

а) n=1, m – простое число

D(m1) = D(m) = 1

б) n=k

D(mk) = k∙mk–1.

в) n=k+1

D(mk+1) = D(mk∙m) = + = m∙k∙ + = m1∙k∙ + = mk∙k + = (k+1)∙mk

Формула D(mn) = n∙mn–1для любого целого m и n ≥ 0.

1. **НОД (D(m),m)**

Найдем НОД (D(m),m)

1) Или m–простое, то НОД (D(m),m) = 1

а) НОД (D(4),4)

D(4) = D(2∙2) = 2∙D(2) + 2∙D(2) = 2+2 = 4

НОД (D(4),4) = 4

б) НОД (D(6),6)

D(6) = D(3∙2) = 2∙D(3) + 2∙D(2) = 2+3 = 5

НОД (5,6) = 1

в) НОД (D(8),8)

D(8) = D(4∙2) = 2∙D(4) + 4∙D(2) = 2∙4+4∙1 =8+ 4=12

НОД (12,8) ≠ 1 = 4

г) НОД (D(10),10)

D(10) = D(5∙2) = 2∙D(5) + 5∙D(2) =7

НОД (7,10) = 1

д) НОД (D(12),12) = НОД (21,18) = 3

D(18) = 21

2) Если D(m) = D(k∙t), где k и t – взаимно простые числа, то

НОД (D(m),m) = 1

3) Если D(m) = D(k∙t), где k и t – не взаимно простые числа, то

НОД (D(m),m) ≠ 1

1. **Свойства арифметической производной**

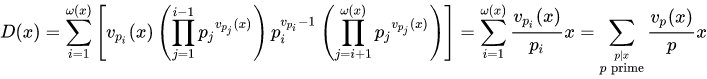
Найдём другие свойства D(p)

1. D(pn) = n∙pn–1D(p)

Это позволяет вычислить производную от простой факторизации целого числа

Для любых целых чисел p и n ≥ 0:

Это позволяет вычислить производную от простого факторизации целого числа,  



где , простая омега–функция, является количеством различных простых множителей в х и vp– это p–адическая оценка для х

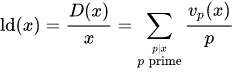
Например: 

илиD(81) = D(34) = 4∙33 = 4∙27∙1 = 108

Начинается последовательность числовых производных для k = 0, 1, 2,...

0,0,1,1,4,1,5,1,12,6,7,1,16,1,9,…

Связанные функции

Логарифмическая производная  полностью аддитивная функция : 

Неравенства и границы

E. Ж. Барбо исследовал границы арифметической производной. Он обнаружил, что



и



Где простая омега–функция – это количество простые множители в n. В обеих приведенных выше границах равенство всегда возникает, когда n является полной степенью двойки, то есть для n=2m некоторого m

Даль, Олссон и Лойко обнаружили, что арифметическая производная натуральных чисел ограничена

D(n) ≤

где p – наименьшее простое число в n и равенство сохраняется, когда n является степенью p, и обнаружил, что невозможно найти аналогичные оценки для арифметической производной, расширенной до рациональных чисел, путем доказательства того, что между любыми двумя рациональными числами есть другие рациональные числа с произвольными большими или малыми производными.

Порядок среднего

Мы имеем + O ()

и + O

для любого δ>0, где T0 =

1. **Составная арифметическая производная**

Если D(m) = D(x) ∙ D(y) –составная производная, в противном случае ((D(m) = D(m)∙1) – простая

а) выясним единственно ли разложения составных производных

Пусть y = f(u), u = f(n), n = f(r), r = f(x)

Тогда

«Правило цепочки» обычно применимо к любой композиции дифференцируемых функций

б) выясним верен ли аналог малой теоремы Ферма, для простых производных

D(m)D(n)–1=1 mod (D(n)), или D(n) – простая производная

Малая теорема Ферма D(m)D(n)–1 сравнима с 1 по простому модулю D(n)

1. **Дополнительные исследования. Близнецы**

Выясним, существуют ли такие целые m,n, такие что

а) D(m) = m

1) D(4) = D(2∙2) = 2D(2) + 2D(2) = 4

2) D(27) = D(9∙3) = 3D(9) + 9D(3) = 3D(3∙3) + 9D(3) = 3∙(3D(3) + 3D(3)) + 9∙1 = 3∙6+9=27

б) D(m)∙D(n) = m∙n

1) D(4)∙D(27) = 4∙27= 108

в) =

1) =

2) =

а) D(m+n) = D(m)+D(n)

1) D(3 )= D(2+1 ) =1

D(2) + D(1) = 1+0 =1

то есть D(2+1) = D(2) + D(1)

D(6) = D(4 + 2) = 5

D(4) = 4 D(4) + D(2) = 4+1 = 5

D(2) = 1

б )D(m–n) = D(m)+D(n)

1) D(3–2)= D(1) =0

D(3) – D(2) = 1–1 =0, значит D(3–2) = D(3) – D(2)

D(6 – 2) = D(4) = 4

D(6) – D(2) = 5 – 1 = 4, значит D(6–2) = D(6) – D(2)

Вывод: такие числа существуют

2. Назовем «близнецами» числа с одинаковыми производными. Найдем близнецы

D(1) = 0

D(2) = 1

D(3) = 1

D(4) = 4

D(5) = 1

D(6) = 5

D(7) = 1

D(8 )= 12

D(9) = D(3∙3) = 3D(3) + 3D(3) = 6

D(10) = 7

D(11) = 1

D(12) = D(4∙3) = 3D(4) + 4D(3) = 12+4 = 16

D(13) = 1

D(14) = 9

D(15) = 8

D(16) = 32

D(17) = 1

D(18) = 21

D(19)=1

D(20)= D(4∙5) = 5D(4) + 4D(5) = 20+4=24

D(21) = 10

D(22) = 13

D(23) = 1

D(24)= D(4∙6) = 6D(4) + 4D(6) = 24+20=44

D(25) = 10

D(26) = 15

D(27)= D(9∙3) = 3D(9) + 9D(3) = 18+9=27

D(28) = D(2∙14) = 14D(2) + 2D(14) = 18+14=32

D(29) =1

D(30) = D(3∙10) = 10D(3) + 3D(10) = 10+21=31

D(31)= 1

D(32) = D(25) = 5∙24=5∙16=80

D(33) = 14

D(34) = 19

D(35)= 12

D(36) = D(6∙6) = 6D(6) + 6D(6) = 60

D(37) = 1

D(38) = 21

D(39)=16

D(40) = D(4∙10) = 10D(4) + 4D(10) = 40+28=68

D(41) = 1

D(42) = D(2∙21) = 21D(2) + 2D(21) = 21+2∙10=41

D(43)= 1

D(44) = D(4∙11) = 11D(4) + 4D(11) = 44+4=48

D(45) = D(9∙5) = 5D(9) + 9D(5) = 30+9=39

D(46) = 25

D(47)=1

D(48) = D(2∙24) = 24D(2) + 2D(24) = 24+44=68

D(49) = 14

D(50) = D(25∙2) = 2D(25) + 25D(2) = 2∙10+25=45

D(51)= 20

D(52) = D(2∙26) = 26D(2) + 2D(26) = 26+2∙15=56

D(53) = 1

D(54) = D(2∙27) = 2D(27) + 27D(2) = 27+2∙27=84

D(55)= 16

D(56)= D(2∙28) = 2D(28) + 28D(2) = 28+2∙32=92

D(57) = 22

D(58) = 2+29=31

D(59) = 1

D(60)= D(2∙30) = 30D(2) + 2D(30) = 30+2∙31=92

D(61) = 1

D(62) = 2+31=35

D(63) = D(7∙9) = 9D(7) + 7D(9) = 9+7∙6=51

D(64)= D(26) = 6∙25=6∙32=192

D(65)=5+13=18

D(66) = D(6∙11) = 11D(6) + 6D(11) = 11∙5+6 = 55+6=61

D(67) = 1

D(68) = D(2∙34) = 2D(34) + 34D(2) = 34+2∙19= 34+38 = 72

D(69)= D(3∙23) = 26

D(70) = D(2∙35) = 35 +2∙12=59

D(71)= 1

D(72) = D(2∙36) = 2D(36) + 36D(2) = 36+2∙60= 36+120 = 156

D(73) = 1

D(74) = D(2∙37) = 2+37=39

D(75)= D(5∙15) = 15D(5) + 5D(15) = 15+5∙8= 55

D(76)= D(2∙38) = 38D(2) + 2D(38) = 38+2∙21 = 80

D(77) = 7+11=18

D(78) = D(2∙39) = 39D(2) + 2D(39) = 34+2∙16= 39+32 = 71

D(79) = 1

D(80)= D(2∙40) = 40D(2) + 2D(40) = 40+2∙68= 40+136 = 176

D(81)= D(34) = 4∙33=4∙27=108

D(82)= D(2·41) = 41+2=43

D(83) = 1

D(84) = D(2∙42) = 42D(2) + 2D(42) = 42+2∙41= 42+82 = 124

D(85) = D(17∙5) = 5+17 = 22

D(86)= D(2∙43) = 43+2=45

Все простые числа можно считать близнецами

А также например

D(16) = D(28) = 32

D(25) = D(21) = 10

D(8)= D(35) = 12

D(38)= D(18) = 21

D(55)=D(39)= D(12) = 16

D(40)= D(48) = 68

D(49) = D(33) =14

D(58) = D(30) = 31

D(60)= D(56) = 92

D(74)= D(45) = 39

D(76)= D(32) = 80

D(77)= D(65) = 18

D(85)= D(57) = 22

D(86)= D(50) = 45

Могут ли числа быть «близнецами» и при этом принадлежать разным кольца?

Ответ: не могут.

Так как D = должно быть целым числом. D(m) должно быть кратно n, должно быть кратно n2. Предполагается, что несократимая дробь. Значит числа, принадлежащие разным кольцам, не могут быть близнецами.

**Заключение**

Было рассмотрено определение арифметической производной для случая натуральных и рациональных чисел, а также были исследованы все пункты задачи «Производная от числа», свойства арифметической производной.

Предположили, когда НОД(D(m);m) ≠ 1 и когда НОД(D(m);m) = 1.

Сложность вызвал четвертый пункт задачи о составной производной. Пятый, шестой и седьмой пункт имеют бесконечное множество решений.

**Литература**

1. Haukkanen P., Mattila M., Merikoski J., Tossavainen T. Can the Arithmetic Derivative be Dericative be Defined on a Non-Unique Factorization Domain? // Journal of Integer Sequences, 16(2003), #13.1.2.
2. Kovic J. The Arithmetic Derative and Antiderative // Journal of Integer Sequences 15(2012), Article 12.3.8.
3. https://en.wikipedia.org/wiki/Arithmetic\_derative / (This page was last edited on 22 April 2017).